Álgebra lineal en notación de Dirac

Recapitulando

Vectores "kets" $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}$

Vectores duales "bras" $\langle\alpha|$

$$a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle \xleftrightarrow{\text{conjugado}} a^*\langle\alpha| + b^*\langle\beta|$$

$c|\alpha\rangle = |\alpha\rangle c$ (los escalares se pueden mover) (y sólo los escalares!)

Operadores $\hat{A}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

Def. $\Rightarrow$ El dual de $A|\psi\rangle$ es $\langle\psi|A^\dagger$

$A^\dagger$ es el conjugado hermitiano / hermítico

(Def equivalente $\left(|\alpha\rangle, \hat{A}|\beta\rangle\right) = \left(\hat{A}^\dagger|\alpha\rangle, |\beta\rangle\right)$)

Nota: Tanto $\hat{A}|\psi\rangle$ como $\langle\psi|\hat{A}$ son objetos válidos. Sin embargo, al conjugar $\hat{A}|\psi\rangle$ no obtenemos necesariamente $\langle\psi|\hat{A}$.

In[15]:= $(1\ 0).\begin{pmatrix} I & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ // MatrixForm

Out[15]//MatrixForm= $(i\ \ i)$

In[17]:= $\begin{pmatrix} I & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ // MatrixForm

Out[17]//MatrixForm= $\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$

In[16]:= $\left((1\ 0).\begin{pmatrix} I & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^\dagger\right)^\dagger$ // MatrixForm

Out[16]//MatrixForm= $\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$

Ya sabemos que $\langle\psi|\varphi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle^*$

Si tomamos $|\varphi\rangle = A|\alpha\rangle$ y $|\psi\rangle = |\beta\rangle$

Como $\langle\varphi| = \langle\alpha|A^\dagger$ $\quad \langle\psi| = \langle\beta|$

$$\langle\beta|A|\alpha\rangle = \langle\alpha|A^\dagger|\beta\rangle^*$$

$\therefore$ Al conjugar $\langle\alpha|A|\beta\rangle$ hay que conjugar el operador también.

Operadores definidos con producto ext.

$$\underbrace{(|\alpha\rangle\langle\beta|)}_{op}\underbrace{|\gamma\rangle}_{ket} = \underbrace{|\alpha\rangle}_{ket}\underbrace{\langle\beta|\gamma\rangle}_{escalar} = \langle\beta|\gamma\rangle\,|\alpha\rangle$$

Obs $(|u\rangle\langle v|)^{\dagger} = ?$

$$\langle\psi|A^{\dagger}|\varphi\rangle = \langle\varphi|A|\psi\rangle^{*} \Rightarrow \langle\psi|(|u\rangle\langle v|)^{\dagger}|\varphi\rangle = (\langle\varphi|u\rangle\langle v|\psi\rangle)^{*}$$
$$= \langle\psi|v\rangle\langle u|\varphi\rangle$$
$$= \langle\psi|(|v\rangle\langle u|)|\varphi\rangle$$

$\therefore (|u\rangle\langle v|)^{\dagger} = |v\rangle\langle u|$

Bases

- Base es un conjunto L.I. de vectores que generan al espacio

$$\gamma = \{|u_i\rangle : i \in I\}$$

Si escribimos $|\alpha\rangle = \sum_{i\in I} a_i |u_i\rangle$

La representación por componentes de $|\alpha\rangle$ en la base γ es

$$[|\alpha\rangle]_{\gamma} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Nos vamos a concentrar en **bases ortonormales** (ortogonales de norma 1)
Es decir

$$\langle u_i|u_j\rangle = \delta_{ij} \text{ de Kronecker}$$

Así, si $|\alpha\rangle = \sum_i a_i |u_i\rangle$, $\langle u_j|\alpha\rangle = \sum_i a_i \underbrace{\langle u_j|u_i\rangle}_{\delta_{ji}}$
$= a_j$

$\therefore$ La componente j del vector $|\alpha\rangle$ en la base γ es $a_j = \langle u_j|\alpha\rangle$

Relación de completez

Como $|\alpha\rangle = \sum_{i\in I} a_i |u_i\rangle = \sum |u_i\rangle a_i$

$$= \sum |u_i\rangle\langle u_i|\alpha\rangle$$

$$= \left(\sum |u_i\rangle\langle u_i|\right)|\alpha\rangle$$

Como $|\alpha\rangle$ es arbitrario

$$\sum |u_i\rangle\langle u_i| = \mathbb{1}$$

Esta relación es muy útil.

Se llama: relación de completitud

completez

resolución de la identidad

$$\langle\alpha| = \langle\alpha|\mathbb{1} = \sum \underbrace{\langle\alpha|u_i\rangle}_{a_i^*} \langle u_i| = \sum a_i^* \langle u_i|$$

Como $\langle\alpha|$ es una transformación lineal la podemos representar con una matriz en la base γ.

$$[\langle\alpha|]_\gamma = \begin{array}{c} \langle\alpha|u_i\rangle \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} a_1^*, & \cdots\cdots, & a_N^* \end{pmatrix} \end{array}$$

Las columnas de la matriz se obtienen al aplicar el funcional a los vectores base.

- La relación entre las matrices que representan a $\langle\psi|$ y $|\psi\rangle$ es que una es el conjugado Hermitiano de la otra.

Con una base podemos expresar el producto punto.

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\alpha|\mathbb{1}|\beta\rangle = \dots = \sum \alpha_i^*\beta_i$$

$$(\alpha_1^*, \dots, \alpha_N^*)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_N\end{pmatrix} = \alpha_1^*\beta_1 + \dots + \alpha_N^*\beta_N$$

Notar que este producto punto lo podemos ver como aplicar la transformación lineal $\langle\alpha|$ al vector $|\beta\rangle$

¿Cómo es la matriz asociada al operador $U = |u_i\rangle\langle u_j|$?

$$[|u_i\rangle\langle u_j|]_\gamma = \left(U|u_1\rangle, \dots, U|u_k\rangle, \dots, U|u_N\rangle\right)$$

$$|u_i\rangle\langle u_j|u_k\rangle = |u_i\rangle\delta_{jk} \qquad = \left(0, \dots, [|u_i\rangle]_\gamma, 0, \dots 0\right)$$

sólo la columna j es distinta de cero.

columna j

$$= \begin{array}{c c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & i \\ \quad\; j & \end{array}$$

Operadores

$$A = \mathbb{1} A \mathbb{1} = \sum_{i,j} |u_i\rangle \overbrace{\langle u_i| A |u_j\rangle}^{\in \mathbb{C}} \langle u_j|$$

$$= \sum \langle u_i|A|u_j\rangle\, |u_i\rangle\langle u_j|$$

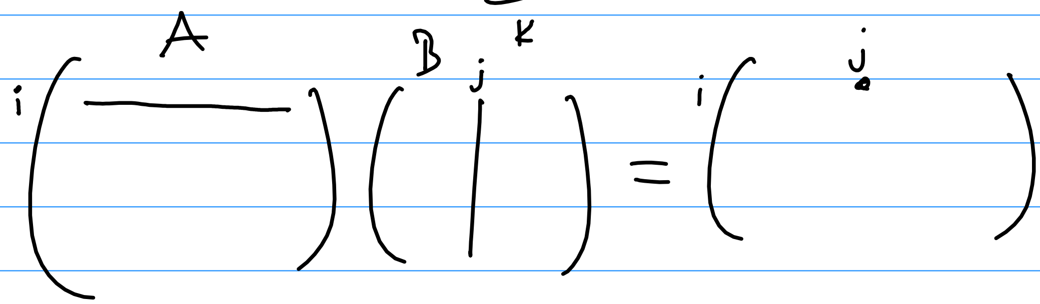
$$A_{ij} = \langle u_i|A|u_j\rangle$$

fila columna

Para que funcione producto de matrices

$$\langle u_i|AB|u_j\rangle = \sum_k \langle u_i|A|u_k\rangle\langle u_k|B|u_j\rangle$$

$$= \sum_k A_{ik} B_{kj}$$



- Si conocemos las componentes de $|\psi\rangle$ y A, cómo calculamos las componentes de $|\psi'\rangle = A|\psi\rangle$ (Poner expresión para las componentes de $|\psi'\rangle$ y meter $\mathbb{1}$ entre A y $|\psi\rangle$)
- Obtener la expresión para $\langle\phi|A|\psi\rangle = \langle\phi|\mathbb{1}A\mathbb{1}|\psi\rangle = \cdots = \sum_{i,j} b_i^* A_{ij} c_j$
- Representación de $A^\dagger$. Recordando que

$$\langle\phi|A\dagger|\psi\rangle = \langle\psi|A|\phi\rangle *$$

  vemos que

$$\left(A^\dagger\right)_{ij} = \langle u_i|A^\dagger|u_j\rangle = \langle u_j|A|u_i\rangle^* = A_{ji}^*$$

- Análogo para bases continuas
- Si A es Hermitiano $A^\dagger = A$ y por tanto $A_{ij} = A_{ji}^*$
- $\therefore$ Los elementos diagonales de una matriz hermitiana siempre son reales.